Prova 1 - Geometria não Euclideana

- Os exercícios abaixos são de geometria neutra. Portanto você não deve usar o postulado das paralelas ou afirmação equivalente.
- Na resolução dos exercícios abaixo considere válidos os axiomas de Birkhoff como apresentados no livro [2].
- Se necessário, use os axiomas de Hilbert como apresentados em [1], que provamos serem proposições dos axiomas de Birkhoff.
- A resolução deve ser entregue escrita à mão, ou seja, não deve ser digitada.

Geometria Neutra

1 — Seja ϕ a função que associa aos números positivos a e b e ao ângulo $\gamma \in (0, \pi)$ o comprimento $\phi(a, b, \gamma)$ do terceiro lado AB do triângulo $\triangle ABC$ de lados $|BC| = a$, $|AC| = b$ e $(\angle C) = \gamma$.

a) Mostre que existe $h(r)$ tal que $\phi(r, r, \gamma) < h(r)\gamma$.
[Veja Exercícios 1 e 2, pg. 44, de [2]]

b) Prove que $\phi(r, r, \gamma) \to 0$ se $\gamma \to 0$ para r fixado.

c) Mostre que ϕ depende continuamente de a, b e γ.

2 — Mostre o Princípio da Continuidade Circular:

a) Se um círculo γ tem um ponto no interior de um segundo círculo γ', então esses dois círculos se intersectam em dois pontos. Nesse caso, a distância entre os centros dos círculos está entre a diferença e a soma dos raios de γ e γ'.

b) Se a distância entre os centros dos círculos é igual a diferença ou a soma dos raios de γ e γ', então os círculos se intersectam num único ponto. Nesses casos, dizemos que os círculos são tangentes.

c) Se a distância entre os centros dos círculos é menor que a diferença ou maior que a soma dos raios de γ e γ', então os círculos não se intersectam.

3 — Considere um triângulo reto $\triangle PXY$ com ângulo reto em X.

a) Construa um novo triângulo retângulo $\triangle PX'Y'$ com ângulo agudo $\angle P$ em comum com o dado triângulo, mas com uma hipotenusa duas vezes maior.

b) Mostre que o lado oposto ao ângulo agudo, no mínimo, dobra de comprimento e que o lado adjacente ao ângulo agudo, no máximo, dobra.

4 — Demonstre:

a) (**"Axioma" de Aristóteles**) Dado um ângulo agudo $\angle \mathsf{BAC}$ e um segmento qualquer PQ, existe Y em $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$ tal que, se X é o pé da perpendicular por Y em $\overrightarrow{\mathsf{AC}}$, temos $\mathsf{XY} > \mathsf{PQ}$.

b) Considere uma semirreta $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$, um ponto P não colinear com A e B, e $\angle \mathsf{XVY}$ um ângulo agudo qualquer. Então existe R em $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$ tal que $\angle \mathsf{PRA} < \angle \mathsf{XVY}$.

5 — Dada s uma reta paralela a r tal que s não é paralela limite de r. Mostre que r e s têm necessariamente uma perpendicular em comum.
[*Dica:* Fazer "Major Exercises" 2-6 do capítulo 6 do livro [1].]

Referências Bibliográficas

[1]M. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. W. H. Freeman, 2008.

[2]A. Ramsay and R. Richtmyer. *Introduction to Hyperbolic Geometry*. Ecological Studies. Springer, 1995.