Lista 1 - Geometria não Euclideana

Geometria Neutra

- Na resolução dos exercícios abaixo considere válidos os axiomas de Birkhoff como apresentados no livro [2].
- Se necessário, use os axiomas de Hilbert como apresentados em [1], que provamos serem proposições dos axiomas de Birkhoff.

1 — Mostre que existem três retas distintas não concorrentes em $\mathbb{P}^2$.

2 — Dado $\overrightarrow{AB}$ uma semireta e x um número real positivo. Mostre que existe um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$. tal que $|AP| = x$.

3 — Mostre que para dois pontos A e B quaisquer vale:

a) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$;

b) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$

4 — Prove a propriedade de separação da reta: Se $C * A * B$ e r é a reta por A, B e C, então, para todo ponto P em r, P está em $\overrightarrow{AB}$ ou no raio oposto $\overrightarrow{AC}$. Além disso, se P está em $\overrightarrow{AB}$ e em $\overrightarrow{AC}$ então $P = A$.

5 — Dados uma reta r, um ponto A em r, e um ponto B fora de r, mostre que todo ponto de $\overrightarrow{AB}$ (exceto A) estão do mesmo lado da reta r que B.

6 — Mostre que uma reta não pode estar inteiramente contida no interior de um triângulo.

7 — A partir dos axiomas de Birkhoff demonstre os axiomas de congruência de Hilbert.

8 — Mostre que num triângulo $\triangle ABC$ se $\angle b \cong \angle C$ então $AB \cong AC$ e $\triangle ABC$ é isósceles.

9 — Dados $\overrightarrow{BG}$ entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, e $\overrightarrow{EH}$ entre $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EF}$, com $\angle CBG \cong \angle FEH$ e $\angle ABC \cong \angle DEF$. Mostre que $\angle GBA \cong \angle HED$ (subtração de ângulos).

10 — Mostre que

a) Se dois ângulos são complementares então ambos são agudos.

b) Os suplementos de ângulos congruentes são congruentes.

11 — Mostre que um círculo

$$C = \{x | d(x, a) = r\}$$

a) Possui pelo menos um ponto.

b) Que os pontos de C estão em bijeção com $[0, 2\pi)$

12 — De modo geral dados dois subconjuntos Γ e Ξ em $\mathbb{P}$ dizemos que estes conjuntos são congruentes se existir uma função $\sigma : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ bijetiva tal que para todo $P, Q \in \mathbb{P}$ tal que

$$d(\sigma(P), \sigma(Q)) = d(P, Q)$$

e tal que $\sigma(\Gamma) = \Xi$.

a) Mostre que a relação de congruência satisfaz as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

b) Mostre que dois segmentos são congruentes se e somente se possuem o mesmo tamanho.

c) Mostre que ângulos são congruentes se e somente se possuem a mesma medida.

d) Mostre que dois triângulos são congruentes se e somente se os seus lados e seus ângulos são dois a dois congruentes.

13 — Mostre que se duas alturas de um triângulo são congruentes então o triângulo é isósceles.

14 — Mostre que as alturas de um triângulo equilátero são congruentes.

15 — Mostre que se dois segmentos AH e RB se bisseccionam em F, então ΔFAB é congruente a ΔFHR

16 — Dado um círculo C e um ponto $Q \in C$. Mostre que existe uma única reta tangente a C passando por Q

17 — Dado um espaço métrico, dizemos que ele é completo se toda sequência de Cauchy converge. Mostre que $\mathbb{P}^2$ é um espaço métrico completo.

Referências Bibliográficas

[1]M. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. W. H. Freeman, 2008.

[2]A. Ramsay and R. Richtmyer. *Introduction to Hyperbolic Geometry*. Ecological Studies. Springer, 1995.