Lista 3 - Geometria Não Euclideana

Geometria Neutra

1 — Seja $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ o círculo unitário de $\mathbb{C}$. Seja A um círculo de $\mathbb{C}$ com centro $re^{i\theta}$, $r > 1$, e raio $s > 0$. Mostre que A é perpendicular a $\mathbb{S}^1$ se e somente se $s = \sqrt{r^2 - 1}$.

2 — Sejam $p, q \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(p) \neq \mathrm{Re}(p)$. Seja A o círculo centrado em $\mathbb{R}$ contendo p e q. Encontre o centro e raio de A em termos de $\mathrm{Re}(p), \mathrm{Im}(p), \mathrm{Re}(q), \mathrm{Im}(q)$.

3 — Mostre que a sequência $z_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ converge para $0 \in \overline{\mathbb{C}}$, e que $z_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ converge para $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

4 — Determine o fecho em $\overline{\mathbb{C}}$ de $X = \{1/x; x \in \mathbb{R}_+^*\}$ e de $Y = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{a + bi; ab, b \in \mathbb{Q}\}$.

5 — Seja $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ encontre a fórmula explícita da projeção estereográfica ξ de $\mathbb{S}^2$ pelo pólo $N = (0, 0, 1)$ no plano $\{z = 0\}$ identificado com $\mathbb{C}$ pela aplicação $(x, y, 0) \mapsto z = x + iy$. Encontre também ξ^{-1}.

6 — Seja $g(z)$ um polinômio de grau no mínimo 1. Mostre que $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$f(z) = g(z) \text{ para } z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad f(\infty) = \infty$$

é contínua em $\overline{\mathbb{C}}$.

7 — Determine o centro e raio da imagem do círculo de equação $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta} z + \gamma = 0$ pelos homomorfismos:

a)

$$f(z) = az + b \text{ para } z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad f(\infty) = \infty,$$

$a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$;

b)

$$J(z) = \frac{1}{z} \text{ para } z \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad J(0) = \infty \quad \text{e} \quad J(\infty) = 0.$$

8 — Considere a tripla não ordenada $\mathsf{T} = \{0, 1, \infty\}$ de pontos de $\overline{\mathbb{C}}$. Determine todas as transformações de Möebius m satisfazendo $m(\mathsf{T}) = \mathsf{T}$. Isso contradiz o fato de Mob^+ agir livremente sobre triplas de pontos de $\overline{\mathbb{C}}$? Por quê?

9 — Explicite uma transformação de Möebius que leve o disco unitário $\mathbb{D}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ em $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

10 — Determine os valores reais de s para os quais os pontos $2 + 3i$, $-2i$, $1 - i$, e s estão num círculo de $\overline{\mathbb{C}}$.

11 — Normalize as seguintes transformações de Möebius:

a) $m(z) = \frac{2z+4}{5z-7}$;

b) $m(z) = iz + 1$;

c) $m(z) = \frac{iz+1}{z+3i}$.

12 — Prove que os elementos de Mob são homeomorfismos conformes de $\overline{\mathbb{C}}$.
[Ver [Anderson], Theorem 2.23, pg 54.]

13 — Determine a expressão geral de um elemento de $\mathsf{Mob}(\mathbb{S}^1)$.