Daniel Miranda, Sinuê Lodovici

Geometria Não Euclidiana

Uma Introdução à Geometria Hiperbólica

Universidade Federal do ABC
Santo André
Versão 1
29 de Fevereiro de 2016

http://shins.yolasite.com/gne.php
Escrito em LaTeX.

CONTENTS

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES GERAIS

. . . : …

AGRADECIMENTOS

...

1 GEOMETRIA NEUTRA

1.1 AXIOMAS DE HILBERT

1.1.1 Incidência

Axioma H. 1 *Para todo ponto P e todo ponto Q distinto de P existe uma única reta r que passa por P e Q.*

Axioma H. 2 *Para toda reta r existe ao menos dois pontos distintos incidentes com r.*

Axioma H. 3 *Existem três pontos distintos com a propriedade de que não existe reta incidente com todos os três pontos.*

1.1.2 Ordem

Axioma H. 4 *Se $A * B * C$, então A, B e C são três pontos distintos todos pertencentes a uma mesma reta, e $C * B * A$.*

Axioma H. 5 *Dados quaisquer dois pontos B e D, existem pontos A, C e E na reta $\overleftrightarrow{BD}$ tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.*

Axioma H. 6 *Se A, B e C são três pontos distintos colineares, então um e exatamente um deles está entre os outros dois.*

Axioma H. 7 (Separação do Plano) *Para toda reta r e quaisquer três pontos A, B e C fora de r:*

1. *Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão do mesmo lado de r.*

2. *Se A e B estão em lados opostos de r e B e C estão em lados opostos de r, então A e C estão do mesmo lado de r.*

1.1.3 Congruência

Axioma H. 8 *Se A e B são pontos distintos e se A' é um ponto qualquer, então para cada semi-reta r com origem em A' existe um único ponto B' em r tal que $B' \neq A'$ e $AB \cong A'B'$.*

Axioma H. 9 *Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, então $CD \cong EF$. Além disso, todo segmento de reta é congruente a si mesmo.*

Axioma H. 10 *Se $A * B * C$ e $A' * B' * C'$, e $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.*

Axioma H. 11 *Dado um ângulo $\angle BAC$, e dada uma semi-reta $\overrightarrow{A'B'}$, então existe uma única semi-reta $\overrightarrow{A'C'}$ num dado lado da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.*

Axioma H. 12 *Se $\angle A \cong \angle B$ e $\angle B \cong \angle C$, então $\angle A \cong \angle C$. Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.*

Axioma H. 13 *(*LAL*) Se dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles são congruentes a dois lados e o ângulo de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.*

1.1.4 Continuidade

Axioma H. 14 *(*Axioma de Dedekind*) Suponha que o conjunto $\{r\}$ de todos os pontos da reta r seja a união disjunta $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de dois conjuntos não vazios tais que nenhum ponto de um esteja entre dois pontos do outro. Então existe um único ponto O em r tal que um dos subconjuntos é igual a uma semi-reta de origem O e o outro subconjunto é igual ao seu complemento.*

1.1.5 Paralelismo

Axioma H. 15 *Para toda reta r e todo ponto P fora de r existe* **no máximo uma** *reta s por P paralela a r.*

1.2 AXIOMAS DOS NÚMEROS REAIS

1.2.1 Corpo

Axioma R. 1 *(*Comutativa*) $x + y = y + x$, $xy = yx$.*

Axioma R. 2 (Associativa) *$x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$.*

Axioma R. 3 (Distributiva) *$x(y + z) = xy + xz$.*

Axioma R. 4 (Existência de Identidade) *Existe dois números reais distintos, usualmente denotados por 0 e 1, tais que para todo x real temos $x + 0 = x$ e $1 \cdot x = x$.*

Axioma R. 5 (Existência de Negativos) *Para todo número real x existe um real y tal que $x + y = 0$. Usualmente denotamos $y = -x$.*

Axioma R. 6 (Existência de Inverso) *Para todo real $x \neq 0$ existe y tal que $xy = 1$. Usualmente denotamos $y = x^{-1}$.*

1.2.2 Ordem

Axioma R. 7 *Existe $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ tal que:*

1. *Se x e y estão em $\mathbb{R}^+$, então $x + y$ e xy também estão.*
2. *Para todo real $x \neq 0$, temos $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$, mas não ambos.*
3. $0 \notin \mathbb{R}^+$

1.2.3 Completude

Axioma R. 8 *Todo subconjunto S de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem um supremo (menor cota superior); isto é existe um real b tal que $b = supS$.*

1.3 AXIOMAS DE BIRKHOFF

Axioma B. 1 *Se A e B são dois pontos distintos, então existe uma e apenas uma reta passando por ambos esses pontos. Denotaremos tal reta por $\overleftrightarrow{AB}$.*

Axioma B. 2 (Espaço métrico) *Existe uma função $|PQ|$ definida para todo par de pontos P e Q do plano, tal que:*

1. *$|PQ| = 0$ se $P = Q$;*
2. *$|PQ| > 0$ se $P \neq Q$;*

3. $|PQ| = |QP|$;

4. (Desigualdade Triangular) $|AC| \leq |AB| + |BC|, \forall A, B, C$.

Observação 1.1 *Da desigualdade triangular obtemos facilmente que, para quaisquer A, B, C vale:*

$$||AB| - |BC|| \leq |AC| \leq |AB| + |BC|.$$

Axioma B. 3 *Para toda reta r existe uma bijeção $x : r \to \mathbb{R}$, denominada* **sistema de coordenada** *(ou* **parametrização***) de r, tal que, para todo para de pontos A, B em r, vale:*

$$|AB| = |x(A) - x(B)|.$$

Dizemos que $x(A)$ é a **coordenada** *de A (no sistema de coordenada x).*

Proposição 1.2 *Se x e y são dois sistemas de coordenada para uma reta r então, para todo P em r vale:*

- $y(P) = x(P) + k$, *ou;*
- $y(P) = -x(P) + k$,

onde k é um número real fixado.

Se $y(P) = x(P) + k$ dizemos que y mantém a ordem de x. Caso contrário dizemos que y inverte a ordem de x.

Definição 1.3 Dizemos que $A * B * C$ se A, B e C são colineares e vale $x(A) < x(B) < x(C)$ ou $x(A) > x(B) > x(C)$, onde x é um sistema de coordenada para reta que contém A, B e C.

Axioma B. 4 *Se r é uma reta qualquer do plano $\mathbb{P}$, existem dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{P}$, HP_1 e HP_2, denominados* **semi-planos***, tais que:*

1. (União disjunta) *O plano $\mathbb{P}$ é a união disjunta de $\mathbb{P}$, HP_1 e HP_2.*

2. (Convexidade) *Se P e Q estão no mesmo semi-plano, então o segmento PQ está contido nesse mesmo semi-plano;*

3. *Se P e Q estão em semi-planos opostos, então o segmento PQ contém um (único) ponto de r.*

Definição 1.4 Um ângulo $\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$ é um par de semirretas $\overrightarrow{h}$ e $\overrightarrow{k}$ que têm uma mesma origem Z. Dixemos que Z é o vértice do ângulo $\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$. É usual denotarmos por $\angle BAC$ o ângulo $\angle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Num triângulo de vértice A, indicaremos usualmente por $\angle A$ o ângulo interno com vértice A.

Dado ângulo $\angle BAC$, dizemos que D está no interior de $\angle BAC$ se D está do mesmo lado que B de $\overleftrightarrow{AC}$ e se D está do mesmo lado que C da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Axioma B. 5 (Medida de Ângulos) *Para cada ângulo* $\angle\overrightarrow{h},\overrightarrow{k}$ *existe um número* $(\angle\overrightarrow{h},\overrightarrow{k})^{rad}$ *no intervalo* $[0,\pi]$, *chamado* **medida** *(em radianos) do ângulo, tal que:*

1. *Se* $\overrightarrow{h}$ *e* $\overrightarrow{k}$ *são a mesma semi-reta, a sua medida é* 0*; se elas são semi-retas opostas sua medida é* π*;*
2. *a soma da medida de um ângulo com a de seu suplementar é* π*;*
3. *se* $\overrightarrow{j}$ *está no interior do ângulo* $\angle\overrightarrow{h},\overrightarrow{k}$*, então* $(\angle\overrightarrow{h},\overrightarrow{j})^{rad}+(\angle\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})^{rad}=(\angle\overrightarrow{h},\overrightarrow{k})^{rad}$
4. *se uma semi-reta* $\overrightarrow{k}$ *com origem em* Z *está na reta* r*, então, em cada semi-plano limitado por* r*, existe uma bijeção entre o conjunto de semi-retas* $\overrightarrow{j}$ *com origem* Z *e os números reais* α *em* $(0,\pi)$ *de tal maneira que* α *é igual a medida* $(\angle\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})^{rad}$ *do ângulo* $\angle\overrightarrow{h},\overrightarrow{k}$*; e*
5. *na condições do item (d), se a semi-reta* $\overrightarrow{j}$ *é determinada por* $\overrightarrow{ZP}$*, onde* P *é um ponto de* $\overrightarrow{j}$*, então o ângulo* α *depende continuamente de* P*, isto é, se* P' *é uma variável ponto e* α' *seu ângulo correspondente, então* $(\alpha-\alpha')\to 0$ *a medida que* $|PP'|\to 0$.

Axioma B. 6 (LAL) *Se os dois lados e o ângulo interno entre eles de um dado triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados e o ângulo interno de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes. Isto é, os demais lados e ângulos são também congurentes.*

Axioma B. 7

- (Euclideano) *Dada uma reta qualquer e um ponto fora dela, existe uma única reta por tal ponto que nunca intersecta a reta dada.*
- (Hiperbólico) *Existe uma reta e um ponto fora dela tais que, por tal ponto, passam ao menos duas retas que não intersectam a reta dada.*

1.4 GEOMETRIA NEUTRA

1.4.1 Incidência

Proposição 1.5 *Duas retas concorrentes se intersectam num único ponto.*

Demonstração: Segue do Axioma B.3. □

Proposição 1.6 *Dada uma reta existe pelo menos um ponto fora dela.*

Demonstração: Segue do Axioma B.4. □

Proposição 1.7 *Dado um ponto, existem ao menos duas retas que o contém.*

Demonstração: Dado um ponto P, use que existe $Q \neq P$. Use Proposição 1.6 para achar R fora de $\overleftrightarrow{PQ}$. Segue $\overleftrightarrow{PR} \neq \overleftrightarrow{PQ}$. □

Proposição 1.8 *Dado um ponto, existe ao menos uma reta que não o contém.*

Demonstração: Dado P use a Proposição 1.7 para obter duas retas r, s por P. Tome $Q \neq P$ em r e $R \neq P$ em s. A reta $\overleftrightarrow{QR}$ não contém P. □

1.4.2 Ordem

Teorema 1.9 (Pasch) *Sejam um triângulo $\triangle ABC$ e r uma reta intersectando AB num ponto entre A e B. Então r intersecta AC ou BC. Se C não está em r, então r não intersecta ambos os segmentos AC e BC.*

Demonstração: Ver Pasch's Theorem em [4] (pg. 80). □

Teorema 1.10 (Barra Transversal) *Se X está no interior de $\angle BAC$, então a semi-reta $\overrightarrow{AX}$ intersecta BC.*

Demonstração: Tome D tal que $B * A * D$. Use o Teorema 1.9 no triângulo $\triangle BDC$. Justifique qual semirreta cruza BC. □

1.4.3 Demais Resultados

Teorema 1.11 (Alternos Internos) *Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas.*

Demonstração: Ver Theorem 4.1 de [4] (pg. 117). □

Definição 1.12 Um ângulo é dito reto se ele é igual ao seu suplementar.

Duas retas que formem um ângulo reto são ditas perpendiculares.

Teorema 1.13 (Existência de Perpendicular) *Para toda reta r e todo ponto P existe reta por P perpendicular a r.*

Demonstração: Ver Proposition 3.16 de [4] (pg. 88). □

Proposição 1.14 (Opostos Pelo Vértice) *Dois ângulos opostos pelo vértice são sempre congruentes.*

Demonstração: Segue do Axioma B.5 e do fato dos ângulos terem mesmo suplementar. □

Teorema 1.15 (Ângulo Exterior) *O ângulo exterior de um triângulo é sempre maior que os interiores dos vértices opostos (individualmente).*

Demonstração: Ver Theorem 4.2 de [4] (pg. 119). □

Corolário 1.16 *Quaisquer dois ângulos internos de um triângulo (também qualquer) somam menos de π.*

Definição 1.17 Dizemos que B é ponto médio do segmento AC se:

- $A * B * C$, e;
- $|AB| = |BC|$.

Proposição 1.18 *Todo segmento admite um único ponto médio.*

Demonstração: Segue da bijeção com $\mathbb{R}$ dada pelo Axioma B. 4. □

Teorema 1.19 (Legendre) *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor ou igual a π.*

Demonstração: Ver Theorem 2.12 de [7] (pg. 48). □

Corolário 1.20 *A soma da medida de dois ângulos internos de um triângulo é menor ou igual à medida do ângulo externo remoto, ou seja, não adjacente a esses ângulos.*

Proposição 1.21 *Num triângulo $\triangle ABC$, se $AB \cong AC$ então $\angle B \cong \angle C$.*

Demonstração: Ver Proposition 3.10 de [4] (pg. 86). $\square$

Proposição 1.22 *Num triângulo $\triangle ABC$, $|AB| > |AC|$ se e somente se $\angle C > \angle B$.*

Demonstração: Suponha $\triangle ABC$ com $|AB| > |AC|$. Tome D tal que $A * C * D$ e $|AB| = |AD|$. Daí:

$$\angle ABC < \angle ABD \cong \angle BDC < \angle ACB,$$

onde a primeira desigualdade decorre de C ser ponto interno de $\angle ABD$, a igualdade da Proposição 1.21 e a segunda desigualdade do Teorema 1.15.

Para recíproca, provemos que se $|AB| \leq |AC|$ então $\angle B \leq \angle C$. Se $|AB| = |AC|$ então $\angle B = \angle C$ pela Proposição 1.21. Se $|AB| < |AC|$ um argumento análogo ao acima prova que então $\angle B < \angle C$. $\square$

Corolário 1.23 (Hipotenusa) *Num triângulo retângulo os ângulos não retos são agudos e a hipotenusa é sempre maior que os catetos (individualmente).*

Demonstração: Segue imediatamente do Teorema 1.19 e da Proposição 1.22. $\square$

Corolário 1.24 (Triângulo Isósceles) *Num triângulo $\triangle ABC$, $AB \cong AC$ se e somente se $\angle B \cong \angle C$.*

Demonstração: Segue imediatamente das Proposições 1.21 e 1.22. $\square$

Teorema 1.25 (Unicidade da Perpendicular) *Para toda reta r e todo ponto P a reta por P perpendicular a r é única.*

Demonstração: Se P está fora de r segue por absurdo do Teorema 1.15. Se P está em r segue do Axioma B.5. $\square$

Proposição 1.26 *Dados P ponto fora da reta r, A em r tal que $\overleftrightarrow{AP} \perp r$ e, B e C são pontos de r tais que $A * B * C$, então $|PC| > |PB|$.*

Demonstração: Segue do Teorema 1.15 e da Proposição 1.22. $\square$

Teorema 1.27 (ALA) *Se dois ângulos e o lado entre eles de um triângulo são congruentes respectivamente a dois ângulos e o lado entre eles de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Consideremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com $AC \cong DF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$. Seja G em ED tal que $AB \cong DG$, então $\triangle ABC \cong \triangle DGF$ pelo Axioma B.6. Portanto, $\angle BCA \cong \angle GFD$, logo $\angle GFD \cong \angle EFD$. Como estes ângulos são congruentes, então, pelo Axioma B. 5, $\overleftrightarrow{FG}$ coincide com $\overleftrightarrow{EG}$. Portanto, G e F são o mesmo ponto e temos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. $\square$

Teorema 1.28 (LLL) *Se dos três lados de um triângulo são congruentes respectivamente aos três lados de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle AEC$ dois triângulos com $AB \cong AE$, $BC \cong EC$ e $AC \cong AC$. Então, $\triangle BCE$ e $\triangle BAE$ são triângulos isósceles, portanto $\angle ABG \cong \angle AEG$ e $\angle CBG \cong CEG$ pelo Corolário 1.24. Então, $\angle ABC \cong \angle AEC$ pelo Axioma B.5. Logo, $\triangle ABC \cong \triangle AEC$ pelo Axioma B.6. $\square$

Teorema 1.29 (LAA) *Se dois ângulos e o lado não incluso entre eles de um triângulo são congruentes respectivamente a dois ângulos e o lado não incluso de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos tais que $AB \cong DE$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$. Mostremos que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Suponha $|BC| > |EF|$. Existe X, ponto no lado BC, tal que $BX \cong EF$. Pelo Axioma B.6, obtemos $\triangle\ ABX \cong\triangle\ DEF$. Logo $\angle AXB \cong \angle DFE \cong \angle ACB \cong \angle ACX$. Como $\widehat{AXB}$ é um ângulo externo do $\triangle AXC$, isso contradiz o Teorema 1.15. Portanto, o ponto X coincide com C e $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. $\square$

Teorema 1.30 *Dados reta r, sistema de coordenadas x em r, e Z ponto fora de r, então:*

1. *A distância $|ZP|$ como função de $x(P)$, onde P é ponto de r é uma função contínua, isto é, a função:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x(P) &\longmapsto |ZP| \end{aligned}$$

é contínua.

2. *f, como descrita acima, admite mínimo no ponto $x(B)$ onde $\overleftrightarrow{ZB} \perp r$, cresce quando P se afasta de B e tende a $+\infty$ quando $P \to \pm\infty$.*

Demonstração: Continuidade decorre facilmente da desigualdade:

$$||ZP| - |ZQ|| \leq |PQ|,$$

onde P, Q são pontos de r.

O limite para ∞ decorre da desigualdade:

$$||QP| - |ZQ|| \leq |ZP|,$$

Onde Q é um ponto qualquer fixado de r.

As demais afirmações seguem das proposições anteriores.

[Ver Theorem 2.2 de [7] (pg. 33).] □

Teorema 1.31 (Teorema do Valor Intermediário) *Dada função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, se k é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.*

Demonstração: Ver demonstração do Wikipedia [en]. □

Teorema 1.32 (Princípio Elementar de Continuidade) *Se um segmento tem um de seus pontos no interior de um círculo e outro no seu exterior então o segmento intersecta o círculo.*

Demonstração: O resultado segue diretamente da continuidade da função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x(P) &\longmapsto |ZP| \end{aligned}$$

onde Z é o centro da circunferência e x é o sistema de coordenada da reta pelos dois pontos dados, e do Teorema do Valor Intermediário.

[Ver Theorem 2.11 de [7] (pg. 45).] □

Teorema 1.33

1. *Se a distância do centro de um círculo até um reta é menor que o raio do círculo, então a reta intersecta o círculo em dois pontos.*

2. *Se a distância do centro de um círculo até um reta é igual que o raio do círculo, então a reta intersecta o círculo em um único ponto. Nesse caso, dizemos que a reta e o círculo são tangentes.*

3. *Se a distância do centro de um círculo até um reta é maior que o raio do círculo, então a reta e o círculo têm intersecção vazia.*

Demonstração: Ver Theorem 2.11 de [7] (pg. 45). □

Proposição 1.34 *Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são tais que $AB \cong DE$ e $AC \cong DF$, mas $(\angle A) > (\angle D)$, então $|BC| > |EF|$.*

Demonstração: Ver Theorem 2.6 de [7] (pg. 39). □

Proposição 1.35 *A função ϕ que associa aos números positivos a e b e ao ângulo $\gamma \in (0, \pi)$ o comprimento $\phi(a, b, \gamma)$ do terceiro lado AB do triângulo $\triangle ABC$ de lados $|BC| = a$, $|AC| = b$ e $(\angle C) = \gamma$, depende continuamente de a, b e γ.*

Demonstração: Ver argumentação após Lemma 2.2 de [7] (pg. 43). □

Teorema 1.36 (Princípio da Continuidade Circular)

1. *Se um círculo γ tem um ponto no interior de um segundo círculo γ', então esses dois círculos se intersectam em dois pontos. Nesse caso, a distância entre os centros dos círculos está entre a diferença e a soma dos raios de γ e γ'.*

2. *Se a distância entre os centros dos círculos é igual a diferença ou a soma dos raios de γ e γ', então os círculos se intersectam num único ponto. Nesses casos, dizemos que os círculos são tangentes.*

3. *Se a distância entre os centros dos círculos é menor que a diferença ou maior que a soma dos raios de γ e γ', então os círculos não se intersectam.*

Demonstração: Ver Theorem 2.11 de [7] (pg. 45). □

1.5 DEFEITO DE TRIÂNGULOS

Definição 1.37 Definimos o defeito δABC de um triângulo $\triangle ABC$ como $180°$ menos a soma dos ângulos internos de $\triangle ABC$.

Observação 1.38 *Note que, na geometria neutra, devido ao teorema de Legendre o defeito de um triângulo é sempre não-negativo.*

Proposição 1.39 (Aditividade do Defeito) *Considere um triângulo $\triangle ABC$ e D um ponto entre A e B. Então $\delta ABC = \delta ACD + \delta BCD$.*

Demonstração: Ver Theorem 4.6 de [4] (pg. 130). □

Corolário 1.40 *Sob as mesmas hipóteses da proposição anterior, a soma dos ângulos internos de $\triangle ABC$ é $180°$ se e somente se a soma dos ângulos de $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$, respectivamente, são $180°$.*

Demonstração: Ver Corollary na pg. 131 de [4]. □

Teorema 1.41 *Se um triângulo com soma de ângulos internos igual a $180°$ existe então:*

1. *Retângulos existem;*
2. *Todo triângulo tem soma de ângulos internos igual a $180°$.*

Demonstração: Ver Theorem 4.7 de [4] (pg. 131). □

Corolário 1.42 *Se existe um triângulo com defeito positivo, então todo triângulo tem defeito positivo.*

1.6 EQUIVALÊNCIAS DO POSTULADO DA PARALELAS

Teorema 1.43 *São equivalentes:*

1. (Hilbert-Birkhoff) *Para toda reta r e todo ponto P fora de r existe* **no máximo uma** *reta s por P paralela a r.*
2. (Euclides) *Se duas retas são interceptadas por um transversal de modo que a soma dos dois ângulos interiores de um lado dessa transversal é menor que $180°$, então as duas retas se cruzam neste mesmo lado da transversal.*
3. *Se um reta é transversal a uma de duas retas paralelas, então ela é também transversal a segunda.*
4. (Recíproca do Teorema dos Ângulos Alternos Internos) *Se duas retas paralelas são intersectadas por uma transversal, então esta forma ângulos alternos internos congruentes com as paralelas.*

5. (Wallis) *Dado um triângulo* $\triangle ABC$ *qualquer, existe* $\triangle DEF$ *semelhante (mas não congruente) a* $\triangle ABC$.

6. *Todos os triângulos têm a soma dos ângulos internos igual a* $180°$.

7. (Clairaut) *Existem retângulos.*

8. *Se* r *e* s *são retas paralelas e* t *é reta perpendicular a* r*, então* t *é também perpendicular a* s.

9. *Dadas duas retas* r *e* s *paralelas, então todo ponto de* r *dista de* s *uma mesma distância.*

10. *Se* r, s, m *e* n *são retas tais que* r *é paralela a* s, m *é perpendicular a* r *e* n *é perpendicular a* s*, então ou* $m = n$ *ou* m *e* n *são paralelas.*

1.7 RESULTADOS "NOVOS"

Definição 1.44 Dizemos que um quadrilátero é de Lambert se três dos seus ângulos internos são retos.

Teorema 1.45 *Num quadrilátero de Lambert, o quarto ângulo é menor ou igual a* $90°$ *e cada lado adjacente a tal ângulo tem comprimento menor ou igual ao seu lado oposto.*

Proposição 1.46 *Considere os triângulos isósceles que entre os lados iguais têm ângulo interno* α*. Se* a *é o comprimento dos lados iguais e* c *é o comprimento do terceiro lado, então temos que* c *é função crescente de* a*. Além disso, se dobramos* a, c *tem seu comprimento, no mínimo, dobrado.*

Corolário 1.47 *Se* $\psi(a,b,c)$ *é a função que associa aos comprimentos* a, b *e* c *o ângulo interno oposto a "c" do triângulo de lados* a, b *e* c*, então, para* c *fixado,* $\psi(r,r,c) \to 0$ *se* $r \to \infty$.

Apêndice

Respostas de Alguns Exercícios

Respostas de Alguns Exercícios

BIBLIOGRAPHY

[1] APOSTOL,T.; *Calculus Vol. I*, Wiley 1967.

[2] ANDERSON, J. W., *Hyperbolic geometry*, Springer 2005.

[3] EUCLIDES, BICUDO I., *Os Elementos*, UNESP

[4] GREENBERG, M, *Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history*, W.H. Freeman, 2007

[5] HILBERT, D., *Fundamentos de Geometria*, Gradiva 2003

[6] LIMA, E. L., *Análise Real - Volume 1*, 2007;

[7] RAMSEY, A., RICHTMYER, R. *An introduction to hyperbolic geometry*, Springer 1985;

[8] REZENDE, E. Q. F., DE QUEIROZ, M. L. B., *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*, 2ª. Ed., UNICAMP, 2008.