72 - Funds. de Cálculo (2014)

1) Domínio: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Assíntotas

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x+1}} = 1$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} e^{\left(-\frac{1}{x+1}\right)^{-\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} e^{\left(-\frac{1}{x+1}\right)^{+\infty}} = +\infty$$

Crescimento

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x+1}}\right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \quad \forall x \in D$$

f sempre crescente

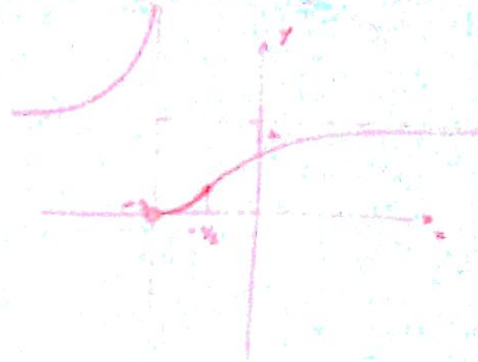
Concavidade

$$f''(x) = \frac{\frac{e^{-\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}(x+1)^2 - 2(x+1)\,e^{-\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^4} \cdot (-2x-1)$$

$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \longrightarrow f''(x) < 0$ se $x > -\frac{1}{2}$ (concav. p/ baixo)

$\searrow f''(x) > 0$ se $x < -\frac{1}{2}$ (concav. p/ cima)



2)

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5!}{e^x} = 0$

↳ L'Hopital (5 vezes)

b)

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

Mas

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Como a exponencial é contínua temos:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$$

3)

a) $I = \int \sec^3 x\, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x\, dx =$

$v' = \sec^2 x \longrightarrow v = \tan x$

$u = \sec x \longrightarrow u' = \tan x \cdot \sec x$

$= \sec x \tan x - \int \underbrace{\tan^2 x}_{(\sec^2 x - 1)} \sec x\, dx =$

$= \sec x \cdot \tan x + \int \sec x\, dx - \underbrace{\int \sec^3 x\, dx}_{I}$

Logo:

$I = \dfrac{\sec x \cdot \tan x}{2} + \dfrac{\ln|\sec x + \tan x|}{2} + C$

b) $\int \sqrt{x^2+2x+2}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2+1}\, dx =$

$\underset{\boxed{u = x+1}}{=} \int \sqrt{u^2+1}\, du \underset{\boxed{u = \tan v}}{=} \int \sqrt{\tan^2 v + 1} \cdot \sec^2 v\, dv =$

$du = \sec^2 v\, dv$

$= \int \sec^3 v\, dv = \dfrac{\sec v \cdot \tan v}{2} + \dfrac{\ln|\sec v + \tan v|}{2} + C$

$\tan v = x+1$
$\sec v = \sqrt{x^2+2x+2}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}\cdot(x+1)}{2} + \dfrac{\ln\left|\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1\right|}{2} + C$

4)

$V = \int \pi f^2(x)\, dx$

$V = \int_0^{\pi/2} \pi \cdot x\cos x\, dx = \pi\left(x \sin x - \int \cos x\, dx\right)\Big|_0^{\pi/2}$

$u = x \longrightarrow u' = 1$
$v' = \cos x \longrightarrow v = \sin x$

$= \pi \left(x \sin x - \sin x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$

5) Como $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$, sabemos que f é não-decrescente.

Suponha que existem $x, y \in (a,b)$, $x \neq y$, tais que $f(x) = f(y)$.

Afirmação: f é constante em $[x,y]$.

Dem: Se $c \in (x,y)$ e $f(c) \neq f(x)$ temos:

Caso 1. $f(c) > f(x) = f(y)$

Absurdo, pois $y > c$ e f não decresce.

Caso 2. $f(c) < f(x)$

Absurdo, pois $c > x$ e f não decresce. ∎

Logo $f' = 0$ em $[x,y]$.

Absurdo, pois existem apenas finitos pontos onde $f' = 0$ ∎

6) $x^4 + 2x^2 = x^2(x^2+2)$

$$\frac{2}{x^4+2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Escolhendo 4 valores distintos de x (com $x \neq 0$) temos sistema de 4 equações, 4 incógnitas de solução:

$A = C = 0$

$B = 1$

$D = -1$

Logo:

$$\frac{2}{x^4+2x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+2}$$

$$\therefore \int \frac{2}{x^4+2x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \ldots$$

Mas: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$ $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\ldots = -\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$