

TOPOLOGIA 1 - LISTA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Exercício 1. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X . Suponha que para cada $x \in A$ existe um aberto U de X tal que $x \in U \subset A$. Mostre que A é aberto na topologia de X .

Exercício 2. (a) Se $\{\tau_\alpha\}$ é uma família de topologias em X , mostre que $\bigcap \tau_\alpha$ é uma topologia em X . $\bigcup \tau_\alpha$ é uma topologia em X ?

(b) Seja $\{\tau_\alpha\}$ uma família de topologias em X . Mostre que existe uma única topologia (menor) em X que contenha todas as coleções τ_α , e uma única topologia (maior) em X que esteja contida em todo τ_α .

(c) Se $X = \{a, b, c\}$, seja

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\} \quad \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Encontre a menor topologia contendo τ_1 e τ_2 , e a maior topologia contida em τ_1 e τ_2 .

Exercício 3. Mostre que se \mathcal{A} é uma base para uma topologia em X , então a topologia gerada por \mathcal{A} é igual a intersecção de todas as topologias em X que contêm \mathcal{A} . Prove a mesma afirmação no caso em que \mathcal{A} é uma subbase.

Exercício 4. Considere as seguintes topologias em \mathbb{R} :

- τ_1 = a topologia padrão,
- τ_2 = a topologia de \mathbb{R}_K (K-topologia),
- τ_3 = a topologia do complemento finito,
- τ_4 = a topologia do limite superior, tendo os conjuntos $(a, b]$ como base,
- τ_5 = a topologia tendo todos os conjuntos $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$ como base.

Determine, para cada uma dessas topologias, quais das outras ela contém.

Exercício 5. Mostre que a coleção enumerável

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b, a \text{ e } b \text{ racionais}\}$$

é uma base que gera a topologia padrão de \mathbb{R} .

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO,
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: <http://sinue.ufabc.edu.br/>