TOPOLOGIA 1 - LISTA 2

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Topologias da Ordem, Pruduto e Induzida

Exercício 1. Sejam X um espaço topológico, Y um subespaço de X e A um subconjunto de Y. Mostre que a topologia induzida por Y em A é a mesma que a topologia induzida por X em A.

Exercício 2. Considere $Y = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Quais dos seguintes conjuntos são abertos em Y? Quais são abertos em $\mathbb{R}$?
(a) $A = \{x \mid \frac{1}{2} < |x| < 1\}$
(b) $B = \{x \mid \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$
(c) $C = \{x \mid \frac{1}{2} \leq |x| < 1\}$
(d) $D = \{x \mid \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$
(e) $E = \{x \mid 0 < |x| < 1 \text{ e } 1/x \notin \mathbb{Z}_+\}$

Exercício 3. Uma função $f : X \to Y$ é dita **aplicação (função) aberta** se para todo U aberto de X, o conjunto $f(U)$ é aberto em Y. Mostre que $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ são aplicações abertas.

Exercício 4. Mostre que o conjunto enumerável

$$\{(a, b) \times (c, d) \mid a < b \text{ e } c < d, \text{ e } a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

é base para a topologia padrão de $\mathbb{R}^2$ (topologia produto da topologia padrão de $\mathbb{R}$).

Exercício 5. Seja X um conjunto ordenado. Se Y é um subconjutno próprio de X (i.e. $Y \subset X$ e $Y \neq X$) que é convexo em X, é verdade que Y é um raio ou intervalos de X?

Exercício 6. Mostre que a topologia da ordem do dicionário em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é a mesma da topologia produto $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}_d$ denota $\mathbb{R}$ munido da topologia discreta. Compare tal topologia com a topologia padrão de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 7. Seja $I = [0, 1]$. Compare a topologia produto de $I \times I$, a topologia da ordem do dicionário em $I \times I$, e a topologia induzida em $I \times I$ por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ quando este último é munido da topologia da ordem do dicionário.

2. Conjuntos Fechados, Pontos de Acumulação e Espaços de Hausdorff

Exercício 8. Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de X. Suponha que $\emptyset$ e X estão em $\mathcal{C}$, e que uniões finitas e intersecções arbitrárias de elementos de $\mathcal{C}$ estão em $\mathcal{C}$. Mostre que:

$$\tau = \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$$

é uma topologia em X.

Exercício 9. Mostre que:
(a) Se A é fechado em Y e Y é fechado em X, então A é fechado em X;
(b) Se A é fechado em X e B é fechado em Y, então $A \times B$ é fechado em $X \times Y$;
(c) Se U é aberto em X e A é fechado em X, então $U - A$ é aberto em X e $A - U$ é fechado em X.

Exercício 10. Sejam A, B e A_α subconjunto de X. Prove as seguintes afirmações:
(a) Se $A \subset B$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$;
(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(c) $\overline{\cup A_\alpha} \supset \cup \overline{A_\alpha}$. Dê um exemplo onde a igualdade falha.

Exercício 11. Critique a seguinte demonstração do Exercício 10(c):

Considere $x \in \overline{\cup A_\alpha}$. Temos, da definição de fecho de um conjunto, que toda vizinhança U de x intersecta $\cup A_\alpha$. Desse modo, temos que U deve intersectar A_α para algum α. Assim, segue que $x \in \overline{A_\alpha}$ para algum α. Daí, portanto, temos $x \in \cup \overline{A_\alpha}$.

Exercício 12. Sejam $A \subset X$ e $B \subset Y$. Mostre que, no espaço $X \times Y$, temos:

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

Exercício 13. Mostre que:

(a) Toda topologia da ordem é Hausdorff;
(b) O produto de dois espaços de Hausdorff é Hausdorff;
(c) Os subespaços de um espaço de Hausdorff são Hausdorff.

Exercício 14. Mostre que X é Hausdorff se e somente se a **diagonal** $\{x \times x \mid x \in X\}$ é fechada em $X \times X$.

Exercício 15. Na topologia do complemento finito em $\mathbb{R}$, para quais pontos de $\mathbb{R}$ a sequência $x_n = 1/n$ converge?

Exercício 16. Considere as cinco topologias de $\mathbb{R}$ descritas no Exercício 4 da Lista 1.

(a) Determine o fecho do conjunto $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ nessas topologias;
(b) Quais dessas topologias são Hausdorff? Quais satisfazem o axioma T_1?

Exercício 17. Se $A \subset X$, definimos o **bordo** de A pela equação:

$$\mathrm{Bd}A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

(a) Mostre que $\mathrm{Int}A$ e $\mathrm{Bd}A$ são disjuntos, e $\overline{A} = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Bd}A$;
(b) Mostre que $\mathrm{Bd}A = \emptyset$ se e somente se A é simultaneamente aberto e fechado;
(c) Mostre que U é aberto se e somente se $\mathrm{Bd}U = \overline{U} - U$;
(d) Se U é aberto, é verdade que $U = \mathrm{Int}(\overline{U})$? Justifique.

3. Funções Contínuas

Exercício 18. Prove que, para funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, as definições de continuidade por $\epsilon - \delta$ e a de continuidade por abertos são equivalentes.

Exercício 19. Suponha $f : X \to Y$ contínua. Se x é ponto de acumulação de $A \subset X$, é necessariamente verdade que $f(x)$ é ponto de acumulação de $f(A)$?

Exercício 20. Sejam X e X' dois espaços topológicos num mesmo conjunto. Sejam τ e τ' suas topologias, respectivamente. Seja $i : X' \to X$ a função identidade.

(a) Mostre que i é contínua se e somente se τ' é mais fina que τ;
(b) Mostre que i é homeomorfismo se e somente se $\tau = \tau'$.

Exercício 21. Dados $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, mostre que as funções $f : X \to X \times Y$ e $g : Y \to X \times Y$ definidas por

$$f(x) = x \times y_0 \qquad \text{e} \qquad g(y) = x_0 \times y$$

são mergulhos.

Exercício 22. Mostre que $(a, b) \subset \mathbb{R}$ é **homeomorfo** a $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, i.e. existe um homeomorfismo entre (a, b) e $(0, 1)$.

Exercício 23. Encontre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua num único ponto.

Exercício 24. Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "contínua à direita´´, i.e.,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua quando consideramos f como função de $\mathbb{R}_l$ em $\mathbb{R}$.

Exercício 25. Seja Y um conjunto ordenado munidoda topologia da ordem. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Considere $h : X \to Y$ definida por

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Mostre que h é uma aplicação contínua. (Use o Lema de Colagem)

Exercício 26. Seja $\{A_\alpha\}$ uma coleção de subconjuntos de X; Seja $X = \cup_\alpha A_\alpha$. Seja $f : X \to Y$; suponha que $f|_{A_\alpha}$ é contínua para todo α.

(a) Mostre que se a coleção $\{A_\alpha\}$ é finita e cada conjunto A_α é fechado, então f é contínua.
(b) Encontre um exemplo onde a coleção $\{A_\alpha\}$ é enumerável e cada A_α é fechado, mas f não é contínua.
(c) Uma família indexada $\{A_\alpha\}$ é dita **localmente finita** se cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança que intersecta A_α para apenas finitos valores de α. Mostre que se a família $\{A_\alpha\}$ é localmente finita e cada A_α é fechado, então f é contínua.

Exercício 27. Seja $F : X \times Y \to Z$. Dizemos que F é **contínua em cada variável separadamente** se para cada $y_0 \in Y$, a função $h : X \to Z$ definida por $h(x) = F(x \times y_0)$ é contínua e para cada $x_0 \in X$, a função $k : Y \to Z$ definida por $K(x) = F(x_0 \times y)$ é contínua. Mostre que se F é contínua, então F é contínua em cada variável separadamente.

Exercício 28. Seja $A \subset X$; seja $f : A \to Y$ confínua; seja Y espaço de Hausdorff. Mostre que se f puder ser extendida a uma função contínua $g : \overline{A} \to Y$, então g é univocamente determinada por f.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/