TOPOLOGIA 1 - LISTA 3

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Espaços Métricos

Exercício 1. (a) Em $\mathbb{R}^n$, defina

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Mostre que d' é um métrica que induz topologia usual de $\mathbb{R}^n$. Esboce os elementos da base da topologia gerada por d' para $n = 2$.

(b) De modo mais amplo, dado $p \geq 1$, defina

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right]^{1/p},$$

para $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Assuma que d' é métrica. Mostre que tal métrica induz a topologia usual de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 2. Seja X um espaço métrico com métrica d.

(a) Mostre que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função continua.

(b) Denote por X' um espaço topológico sobre o mesmo conjunto X. Mostre que se $d : X' \times X' \to \mathbb{R}$ é contínua, então a topologia de X' é mais fina que a topologia de X.

Observação: Isso mostra que a topologia induzida por d é a topologia menos fina (mais grossa) relativa a qual d é contínua.

2. Funções Contínuas em Espaços Métricos

Exercício 3. Sejam X e Y espaços métricos com métricas d_X e d_Y, respectivamente. Mostre que $f : X \to Y$ é contínua se e somente se

$$\forall x \in X,\ \forall \epsilon > 0,\ \text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } [\ d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon\ ]$$

Exercício 4. Sejam X e Y espaços métricos com métricas d_X e d_Y, respectivamente. Seja $f : X \to Y$ tal que para todo par de pontos $x_1, x_2 \in X$ vale

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

Mostre que f é um mergulho. Tal função é denominada **mergulho isométrico** de X em Y.

Exercício 5. Defina $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ pela equação $f_n(x) = x^n$. Mostre que a sequência $(f_n(x))$ converge para cada $x \in X$, mas que a sequência (f_n) não converge uniformemente.

Exercício 6. Sejam X um espaço topológico e Y um espaço métrico. Seja $f_n : X \to Y$ uma sequência de funções contínuas. Seja x_n uma sequência de pontos de X que converge para x. Mostre que, se a sequência (f_n) converge uniformemente para f, então $(f_n(x_n))$ converge para $f(x)$.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/