

TOPOLOGIA 1 - LISTA 3

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. ESPAÇOS MÉTRICOS

Exercício 1. Seja X espaço métrico com métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Defina (a *métrica limitada padrão*) $\bar{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Mostre que:

- (a) \bar{d} é uma função distância em X ;
- (b) d e \bar{d} geram a mesma topologia;
- (c) todo $A \subset X$ é limitado em (X, \bar{d}) , mas não necessariamente limitado em (X, d) .

Exercício 2. Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos a *norma* de x por

$$\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

Definimos a *métrica euclidiana* de \mathbb{R}^n por:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Definimos a *métrica quadrada* de \mathbb{R}^n por:

$$\rho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\},$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

- (a) Mostre que d e ρ são funções distância em \mathbb{R}^n .
- (b) Prove que para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n}\rho(x, y).$$

- (c) Verifique que d e ρ geram a mesma topologia.

Exercício 3. (a) Em \mathbb{R}^n , defina

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Mostre que d' é uma métrica que induz topologia usual de \mathbb{R}^n . Esboce os elementos da base da topologia gerada por d' para $n = 2$.

- (b) De modo mais amplo, dado $p \geq 1$, defina

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right]^{1/p},$$

para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Assuma que d' é métrica. Mostre que tal métrica induz a topologia usual de \mathbb{R}^n .

Exercício 4. Seja X um espaço métrico com métrica d .

- (a) Mostre que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.
- (b) Denote por X' um espaço topológico sobre o mesmo conjunto X . Mostre que se $d : X' \times X' \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então a topologia de X' é mais fina que a topologia de X .

Observação: Isso mostra que a topologia induzida por d é a topologia menos fina (mais grossa) relativa a qual d é contínua.

2. FUNÇÕES CONTÍNUAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS

Exercício 5. Sejam X e Y espaços métricos com métricas d_X e d_Y , respectivamente. Mostre que $f : X \rightarrow Y$ é contínua se e somente se

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } [d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon]$$

Exercício 6. Sejam X e Y espaços métricos com métricas d_X e d_Y , respectivamente. Seja $f : X \rightarrow Y$ tal que para todo par de pontos $x_1, x_2 \in X$ vale

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

Mostre que f é um mergulho. Tal função é denominada **mergulho isométrico** de X em Y .

Exercício 7. Demonstre o *Teorema do Limite Uniforme*:

Teorema Sejam $f_n : X \rightarrow Y$ ($n \in \mathbb{N}$) funções contínuas definidas num espaço topológico X com imagem num espaço métrico Y . Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência que converge uniformemente para $f : X \rightarrow Y$ então f é função contínua.

Exercício 8. Defina $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pela equação $f_n(x) = x^n$. Mostre que a sequência $(f_n(x))$ converge para cada $x \in X$, mas que a sequência (f_n) não converge uniformemente.

Exercício 9. Sejam X um espaço topológico e Y um espaço métrico. Seja $f_n : X \rightarrow Y$ uma sequência de funções contínuas. Seja x_n uma sequência de pontos de X que converge para x . Mostre que, se a sequência (f_n) converge uniformemente para f , então $(f_n(x_n))$ converge para $f(x)$.

3. FUNÇÕES CONTÍNUAS EM COMPACTOS

Exercício 10. Demonstre o *Teorema dos Valores Extremos*:

Teorema Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua, onde Y é conjunto ordenado munido com a topologia da ordem. Se X é compacto, então existem $c, d \in X$ tais que:

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d), \quad \forall x \in X.$$

Exercício 11. Uma função $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços métricos é dita *uniformemente contínua* se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x_0, x_1 \in X$ temos:

$$d(x_0, x_1) < \delta \implies d(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon.$$

Demonstre o *Teorema da Continuidade Uniforme*:

Teorema Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua entre os espaços métricos X e Y . Se X é compacto, então f é uniformemente contínua.