TOPOLOGIA - LISTA DE PRODUTO E QUOCIENTE

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Espaço produto e com topologia por caixas

Exercício 1. Seja $\{X_\alpha\}$ uma família de espaços Hausdorff. Mostre que $\prod X_\alpha$ é Hausdorff tanto na topologia produto quanto na topologia por caixas.

Exercício 2. Seja $\{X_\alpha\}$ uma família indexada de espaços topológicos; sejam $A_\alpha \subset X_\alpha$ para cada α. Mostre que tanto na topologia produto quanto na topologia por caixas em $\prod X_\alpha$ vale que:

$$\prod \overline{A}_\alpha = \overline{\prod A_\alpha}.$$

Exercício 3. Seja $f : A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ dado por

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J},$$

onde $f_\alpha : A \to X_\alpha$ para cada α. Mostre que se $\prod X_\alpha$ tem a topologia produto, então f é contínua se e somente se f_α é contínua para todo α.

Exercício 4. Mostre que em $\mathbb{R}^\omega$ com a topologia por caixas a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ dada por $f(t) = (t, t, t, t, \dots)$ não é contínua.

Exercício 5. Considere $x_1, x_2, \dots$ uma sequência de pontos no espaço produto $\prod X_\alpha$. Mostre que a sequência converge a um ponto x se e somente se $\pi_\alpha(x_1), \pi_\alpha(x_2), \dots$ converge para $\pi_\alpha(x)$ para cada α. Isso vale na topologia por caixas?

Exercício 6. Seja $\mathbb{R}^\infty$ o subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ formado pelas sequências $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ tais que $x_i \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de índices. Qual o fecho de $\mathbb{R}^\infty$ em $\mathbb{R}^\omega$ nas topologias produto e por caixas? Justifique.

2. Espaço Quociente

Exercício 7. (a) Considere $\overline{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ com a topologia gerada pelas bolas abertas $B(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2; ||x - x_0|| < \epsilon\}$ e pelas bolas centradas no infinito $B(\infty, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2; ||x - x_0|| > \epsilon\} \cup \{\infty\}$. Mostre que $\overline{\mathbb{R}}^2$ é homeomorfo a esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (use a projeção estereográfica).

(b) Considere $X = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $S^1 = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$. Considere X^* o espaço quociente obtido a partir de X identificando-se os pontos de S^1. Mostre que X^* é homeomorfo a $\overline{\mathbb{R}}^2$.

(c) Conclua que o espaço quociente X^* é homeomorfo à S^2.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/