

## TOPOLOGIA - LISTA DE PRODUTO E QUOCIENTE

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

### 1. ESPAÇO PRODUTO E COM TOPOLOGIA POR CAIXAS

**Exercício 1.** Seja  $\{X_\alpha\}$  uma família de espaços Hausdorff. Mostre que  $\prod X_\alpha$  é Hausdorff tanto na topologia produto quanto na topologia por caixas.

**Exercício 2.** Seja  $\{X_\alpha\}$  uma família indexada de espaços topológicos; sejam  $A_\alpha \subset X_\alpha$  para cada  $\alpha$ . Mostre que tanto na topologia produto quanto na topologia por caixas em  $\prod X_\alpha$  vale que:

$$\prod \bar{A}_\alpha = \overline{\prod A_\alpha}.$$

**Exercício 3.** Seja  $f : A \rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  dado por

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J},$$

onde  $f_\alpha : A \rightarrow X_\alpha$  para cada  $\alpha$ . Mostre que se  $\prod X_\alpha$  tem a topologia produto, então  $f$  é contínua se e somente se  $f_\alpha$  é contínua para todo  $\alpha$ .

**Exercício 4.** Mostre que em  $\mathbb{R}^\omega$  com a topologia por caixas a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\omega$  dada por  $f(t) = (t, t, t, t, \dots)$  não é contínua.

**Exercício 5.** Considere  $x_1, x_2, \dots$  uma seqüência de pontos no espaço produto  $\prod X_\alpha$ . Mostre que a seqüência converge a um ponto  $x$  se e somente se  $\pi_\alpha(x_1), \pi_\alpha(x_2), \dots$  converge para  $\pi_\alpha(x)$  para cada  $\alpha$ . Isso vale na topologia por caixas?

**Exercício 6.** Seja  $\mathbb{R}^\infty$  o subconjunto de  $\mathbb{R}^\omega$  formado pelas seqüências  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$  tais que  $x_i \neq 0$  apenas para uma quantidade finita de índices. Qual o fecho de  $\mathbb{R}^\infty$  em  $\mathbb{R}^\omega$  nas topologias produto e por caixas? Justifique.

### 2. ESPAÇO QUOCIENTE

**Exercício 7.** Seja  $X$  o subespaço  $[0, 1] \cup [2, 3]$  de  $\mathbb{R}$ , e  $Y$  o subespaço  $[0, 2]$  de  $\mathbb{R}$ . Considere  $p : X \rightarrow Y$  definida por:

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \in [0, 1], \\ x - 1 & \text{para } x \in [2, 3] \end{cases}$$

- (a) Mostre que  $p$  é sobrejetiva, contínua e fechada (logo quociente).
- (b) Mostre que  $p$  não é aplicação aberta.
- (c) Se  $q$  é a restrição de  $p$  à  $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ ,  $q$  é função quociente? Prove sua resposta.

**Exercício 8.** (a) Prove que, se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são funções contínuas tais que  $g \circ f$  é quociente, então  $g$  é quociente.

(b) Suponha que  $f$  seja sobrejetora, é possível concluir que  $f$  é função quociente? Prove ou exiba um contra-exemplo.

(c) Mostre que, se  $f : X \rightarrow Y$  é contínua e existe  $A \subset X$  tal que  $f(A) = Y$  e a restrição  $f|_A$  é função quociente, então  $f$  é quociente.

**Exercício 9.** (a) Seja  $p : X \rightarrow Y$  uma função contínua. Mostre que, se existe uma aplicação contínua  $f : Y \rightarrow X$  tal que  $p \circ f$  é a identidade de  $Y$ , então  $p$  é função quociente.

(b) Se  $A \subset X$ , uma *retração* de  $X$  sobre  $A$  é uma aplicação contínua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$  para todo  $a \in A$ . Mostre que uma retração é uma aplicação quociente.

**Exercício 10.** Seja  $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção na primeira coordenada. Seja  $A$  o subespaço de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  formado pelos pontos  $x \times y$  tais que  $x \geq 0$  ou  $y = 0$  (ou ambos); seja  $q : A \rightarrow \mathbb{R}$  obtida pela restrição de  $\pi_1$ . Mostre que  $q$  é uma função quociente que não é aberta nem fechada.

**Exercício 11.** (a) Considere  $\overline{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  com a topologia gerada pelas bolas abertas  $B(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x - x_0\| < \epsilon\}$  e pelas bolas centradas no infinito  $B(\infty, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x - x_0\| > \epsilon\} \cup \{\infty\}$ . Mostre que  $\overline{\mathbb{R}^2}$  é homeomorfo a esfera  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (use a projeção estereográfica).

(b) Considere  $X = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$  e  $S^1 = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ . Considere  $X^*$  o espaço quociente obtido a partir de  $X$  identificando-se os pontos de  $S^1$ . Mostre que  $X^*$  é homeomorfo a  $\overline{\mathbb{R}^2}$ .

(c) Conclua que o espaço quociente  $X^*$  é homeomorfo à  $S^2$ .

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO,  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC  
E-mail address: [sinue@ufabc.edu.br](mailto:sinue@ufabc.edu.br)  
URL: <http://sinue.ufabc.edu.br/>