

PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 5 das 6 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número 1 a 5. Nesse caso, o exercício 6, mesmo que corretamente resolvido, será completamente ignorado durante a correção desta prova.
- Boa Prova!

Exercício 1 (2,0). Seja X um conjunto e seja τ_c a coleção de todos os subconjuntos U de X tais que ou $X - U$ é enumerável, ou $X - U = X$. Mostre que τ_c é uma topologia em X .

Exercício 2 (2,0). Sejam \mathcal{B} e \mathcal{B}' bases para as topologias τ e τ' de um conjunto X , respectivamente. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- τ' é mais fina que τ .
- Para cada $x \in X$ e cada $B \in \mathcal{B}$, com $x \in B$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Exercício 3 (2,0). Mostre que o conjunto enumerável

$$\{(a, b) \times (c, d) \mid a < b \text{ e } c < d, \text{ e } a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

é base para a topologia padrão de \mathbb{R}^2 (topologia produto da topologia padrão de \mathbb{R}).

Exercício 4 (2,0). Sejam A , B e A_α subconjunto de X . Prove as seguintes afirmações:

- Se $A \subset B$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$;
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- $\cup \overline{A_\alpha} \supset \overline{\cup A_\alpha}$. Dê um exemplo onde a igualdade falha.

Exercício 5 (2,0). Mostre que se X é espaço de Hausdorff, então uma sequência de pontos de X converge para, no máximo, um ponto de X .

Exercício 6 (2,0). Sejam X e Y espaços métricos com métricas d_X e d_Y , respectivamente. Mostre que $f : X \rightarrow Y$ é contínua se e somente se

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } [d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon]$$

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO,
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: <http://sinue.ufabc.edu.br/>