

TOPOLOGIA I (2016)

PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 4 das 5 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- **Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número 1 a 4.** Nesse caso, o exercício 5, mesmo que corretamente resolvido, será completamente ignorado durante a correção desta prova.
- Boa Prova!

Exercício 1 (2,5). Sejam X um conjunto não-vazio e $\{\tau_i\}_{i \in I}$ uma coleção (não-vazia) de topologias sobre X .

- (a) Mostre que $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ é uma topologia para X .
(b) Exiba um contra-exemplo que prove que $\bigcup_{i \in I} \tau_i$ não é necessariamente uma topologia para X .

[Dica: Pense em X com apenas três elementos.]

Resolução: (a) (i) $X, \emptyset \in \tau_i$ para todo $i \in I$, pois todo τ_i é topologia. Logo $X, \emptyset \in \bigcap_{i \in I} \tau_i$.

(ii) Se U_j é elemento de $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ para todo $j \in J$, então $U_j \in \tau_i$ para todo $i \in I$ e todo $j \in J$. Logo $\bigcup_{j \in J} U_j \in \tau_i$ para todo $i \in I$. Portanto, $\bigcup_{j \in J} U_j \in \bigcap_{i \in I} \tau_i$.

(iii) Se U, V são elementos de $\bigcap_{i \in I} \tau_i$, então $U, V \in \tau_i$ para todo $i \in I$. Logo $U \cap V \in \tau_i$ para todo $i \in I$. Portanto $U \cap V \in \bigcap_{i \in I} \tau_i$.

Logo, $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ é topologia em X .

- (b) Sejam $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ e $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Temos τ_1 e τ_2 topologias em X porém $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ não é topologia pois $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} \notin \tau$.

Exercício 2 (2,5). Sejam X e Y espaços topológicos, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em Y . Mostre que a sequência $(x_n \times y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $x \times y \in X \times Y$ se e somente se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para y .

Resolução:

Suponha que $\lim x_n \times y_n = x \times y$. Provemos que $\lim x_n = x$.

Seja U vizinhança de x . Daí $U \times Y$ é vizinhança de $x \times y$. Como $\lim x_n \times y_n = x \times y$, existe n_0 tal que se $n > n_0$ então $x_n \times y_n \in U \times Y$. Logo, para este dado n_0 vale que se $n > n_0$ então $x_n \in U$. Logo $\lim x_n = x$.

Analogamente demonstra-se que $\lim y_n = y$.

Reciprocamente, suponha $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$. Seja A vizinhança de $x \times y$. Por definição de topologia produto, existe $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos tais que $x \times y \in U \times V \subset A$.

Como $\lim x_n = x$, existe n_1 tal que se $n > n_1$ então $x_n \in U$. Como $\lim y_n = y$, existe n_2 tal que se $n > n_2$ então $y_n \in V$. Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Daí, se $n > n_0$ temos $x_n \times y_n \in U \times V \subset A$.

Logo $\lim x_n \times y_n = x \times y$.

Exercício 3 (2,5). Seja $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção na primeira coordenada.

- (a) Mostre que π_1 é uma função quociente.
(b) Mostre que $C = \{x \times y; xy = 1\}$ é fechado e use C para concluir que π_1 não é uma aplicação fechada.

Resolução: (a) Toda aplicação aberta é quociente. Provemos que π_1 é aberta.

Por definição, a base da topologia produto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é formada por conjuntos do tipo $U \times V$ onde U e V são abertos de \mathbb{R} . Logo todo aberto A de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é da forma:

$$A = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i.$$

Daí temos:

$$\pi_1(A) = \pi_1 \left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \right) = \bigcup_{i \in I} \pi_1(U_i \times V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Logo $\pi_1(A)$ é aberto.

(b) C é o gráfico de $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$, que é uma função contínua com imagem num espaço Hausdorff. Provemos:

Proposição 0.1. *Se $f : X \rightarrow Y$ é função contínua e Y é Hausdorff, então $\text{graf}(f) = \{x \times y; y = f(x)\}$ é subconjunto fechado de $X \times Y$.*

Demonstração. Considere $x \times y \in X \times Y$ com $y \neq f(x)$. Sejam V_1 e V_2 abertos de Y que separam y e $f(x)$. Seja U vizinhança de x tal que $f(U) \subset V_2$. É fácil ver que $U \times V_1$ é vizinhança de $x \times y$ que não intersecta $\text{graf}(f)$. Logo o complementar de $\text{graf}(f)$ é aberto. \square

Assim C é fechado e $\pi_1(C) = \mathbb{R} - \{0\}$ não é fechado. Logo π_1 não é aplicação fechada.

Exercício 4 (2,5). Seja Y um conjunto simplesmente ordenado munido da topologia da ordem. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas.

- (a) Mostre que o conjunto $C = \{x; f(x) \leq g(x)\}$ é fechado em X .
 (b) Seja $h : X \rightarrow Y$ a função definida por

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Use o Lema de Colagem para mostrar que h é contínua.

Resolução: (a) Mostremos que $A = X - C = \{x; f(x) > g(x)\}$ é aberto.

Seja $x_0 \in A$. Daí $f(x_0) > g(x_0)$.

Dividamos a análise em dois casos:

- (i) Se existe $d \in Y$ tal que $f(x_0) > d > g(x_0)$.
 Daí $V = f^{-1}((d, +\infty)) \cap g^{-1}((-\infty, d))$ é uma vizinhança de x_0 contida em A .
 (ii) Se NÃO existe $d \in Y$ tal que $f(x_0) > d > g(x_0)$, temos que $f(x_0)$ é sucessor imediato de $g(x_0)$.
 Daí $V = f^{-1}((g(x_0), +\infty)) \cap g^{-1}((-\infty, f(x_0)))$ é uma vizinhança de x_0 contida em A .

Logo x_0 é ponto interior de A . Como x_0 é arbitrário temos que A é aberto, e, portanto, C é fechado.

(b) É fácil ver que $h : X \rightarrow Y$ é a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq g(x) \\ g(x) & \text{se } f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

Por (a), $C_1 = \{x; f(x) \leq g(x)\}$ e $C_2 = \{x; g(x) \leq f(x)\}$ são fechados. $f(x)$ é contínua em C_1 e $g(x)$ é contínua em C_2 . Além disso, f e g coincidem em $C_1 \cap C_2$. Logo, pelo Lema de Colagem, $h(x)$ é contínua.

Exercício 5 (2,5). Se $A \subset X$, definimos o **bordo** de A pela equação:

$$\text{Bd}A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

- (a) Mostre que $\text{Int}A$ e $\text{Bd}A$ são disjuntos, e $\overline{A} = \text{Int}A \cup \text{Bd}A$;
 (b) Mostre que $\text{Bd}A = \emptyset$ se e somente se A é simultaneamente aberto e fechado;
 (c) Mostre que U é aberto se e somente se $\text{Bd}U = \overline{U} - U$;

Resolução: (a) Como $\text{Int}A \subset A$ temos $X - A \subset X - \text{Int}A$. Visto que $\text{Int}A$ é aberto $X - \text{Int}A$ é fechado. Dado que $\overline{(X - A)}$ é o menor fechado que contém $(X - A)$ temos $\overline{(X - A)} \subset X - \text{Int}A$. Portanto $\overline{(X - A)} \cap \text{Int}A = \emptyset$. Como $\text{Bd}A \subset \overline{(X - A)}$ segue que $\text{Bd}A \cap \text{Int}A = \emptyset$.

Quanto a igualdade $\overline{A} = \text{Int}A \cup \text{Bd}A$, claramente temos $\overline{A} \supset \text{Int}A \cup \text{Bd}A$. Suponha agora que $x \in \overline{A}$ e $x \notin \text{Int}A$. Daí toda vizinhança de x intersecta A e $X - A$. Logo $x \in \overline{A} \cap \overline{(X - A)} = \text{Bd}A$.

(b) Se $\text{Bd}A = \emptyset$ então, por (a), $\text{Int}A = \overline{A}$. Como $\text{Int}A \subset A \subset \overline{A}$ segue que $\text{Int}A = A$, logo A é aberto, e $A = \overline{A}$, logo A é fechado.

Reciprocamente, se A é aberto e fechado $A = \overline{A}$ e $\overline{(X - A)} = (X - A)$. Logo $\text{Bd}A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)} = A \cap (X - A) = \emptyset$.

(c) Se U é aberto $\overline{(X - U)} = (X - U)$. Daí $\text{Bd}U = \overline{U} \cap \overline{(X - U)} = \overline{U} \cap (X - U) = \overline{U} - U$.

Reciprocamente, se $x \in U$ temos que $x \notin \text{Bd}U$. Como $\overline{U} = \text{Int}U \cup \text{Bd}U$ temos $x \in \text{Int}U$. Logo U é aberto.