

PROVA 2 - TOPOLOGIA I

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 4 das 5 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número 1 a 4. Nesse caso, o exercício 5, mesmo que corretamente resolvido, será completamente ignorado durante a correção desta prova.
- A nota final desta prova será o mínimo entre 10,0 e a pontuação obtida nas questões, ou seja, não é possível ter nota acima de 10,0 pontos.
- Boa Prova!

Exercício 1 (3,0). Considere X um espaço de Hausdorff.

- (a) **(1,2)** Mostre que dados um compacto $K \subset X$ e um ponto $x \notin K$, existem abertos A e B disjuntos tais que $x \in A$ e $K \subset B$.
- (b) **(0,8)** Mostre que dados dois compactos $K \subset X$ e $L \subset X$ disjuntos, existem abertos A e B disjuntos tais que $K \subset A$ e $L \subset B$.
- (c) **(1,0)** Mostre que se X , além de Hausdorff, é um espaço compacto, então X é normal.

Exercício 2 (2,5). Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua.

- (a) **(1,2)** Mostre que se X é Lindelöf, então $f(X)$ é Lindelöf.
- (b) **(1,3)** Mostre que se X admite subconjunto enumerável denso, então $f(X)$ também admite subconjunto enumerável denso.

Exercício 3 (2,5). Mostre que, se X é um conjunto infinito com a topologia do complemento finito, então X é conexo.

Exercício 4 (2,5). Se \mathbb{R} é munido da topologia formada por todos os conjuntos A tais que $\mathbb{R} - A$ é enumerável ou todo \mathbb{R} , o intervalo $[0, 1]$ é um subespaço compacto? Justifique sua resposta.

Exercício 5 (3,0). Seja X um espaço topológico com base enumerável (X *second-countable*). Mostre que X é Lindelöf, i.e., mostre que toda cobertura de X por abertos admite subcobertura enumerável.

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO,
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: <http://sinue.ufabc.edu.br/>