TOPOLOGIA (PÓS-GRADUAÇÃO 2012)
PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 4 das 5 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- **Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número** 1 **a** 4**.** Nesse caso, o exercício 5, mesmo que corretamente resolvido, será completamente ignorado durante a correção desta prova.
- Boa Prova!

Exercício 1 (2,5). Sejam X e Y espaços topológicos.

(a) Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases das topologias de X e Y respectivamente. Mostre que
$$\mathcal{D} = \{B \times C; b \in \mathcal{B} \text{ e } C \in \mathcal{C}\}$$
é base da topologia por caixas de $X \times Y$.

(b) Mostre que a topologia por caixas e a topologia produto coincidem em $X \times Y$.

Exercício 2 (2,5). Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Suponha que $X = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ onde U_α é aberto para todo $\alpha \in I$. Mostre que se $f|_{U_\alpha}$ é contínua para todo α então f é contínua (i.e. mostre que vale a formulação local da continuidade).

Exercício 3 (2,5). (a) Prove que todo conjunto simplesmente ordenado X munido da topologia da ordem é um espaço de Hausdorff.

(b) Mostre que se A é subespaço de um espaço Hausdorff X então A é Hausdorff.

Exercício 4 (2,5). Considere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y)$.

(a) Descreva $E(f)$ e a aplicação natural $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \frac{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}{E(f)}$.

(b) Descreva os abertos saturados de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em relação a f.

(c) Mostre que $\frac{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}{E(f)}$ com a topologia induzida por q é homeomorfo ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, isto é, mostre que f é aplicação quociente.

Exercício 5 (2,5). Seja X um espaço topológico.

(a) Mostre que se X é metrizável então X tem base enumerável em cada um de seus pontos (i.e. X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade).

(b) Suponha que X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Mostre que se toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ temos $f(x_n) \to f(x)$ então f é contínua.

[*Dica:* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.]

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://shins.yolasite.com/