TOPOLOGIA 1 - LISTA 4

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Espaços Conexos

Exercício 1. Sejam τ e τ' duas topologias em X. Se $\tau' \subset \tau$, a conexidade de X numa topologia implica na conexidade de X na outra? Qual sentido funciona?

Exercício 2. Seja $\{A_\alpha\}$ uma família de subespaços conexos de X. Seja A um subespaço conexo de X. Mostre que, se $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo α, então $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ é conexo.

Exercício 3. Mostre que, se X é um conjunto infinito com a topologia do complemento finito, então X é conexo.

Exercício 4. O espaço $\mathbb{R}_l$ é conexo? Justifique.

Exercício 5. (a) Se Y é subespaço de X, prove que $Y = A \cup B$ é uma separação de Y se e somente se:

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

(b) Seja $Y \subset X$. Sejam X e Y conexos. Mostre que, se A e B formam uma separação de $X - Y$, então $Y \cup A$ e $Y \cup B$ são conexos.

Exercício 6. Seja

$$S = \{x \times sin(1/x) \mid 0 < x \leq 1\} \cup 0 \times [-1, 1].$$

Mostre que o subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ é conexo, mas não é conexo por caminhos.

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Mostre que existe um ponto $a \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(a) = f(-a)$.

Exercício 8. Seja $f : X \to X$ contínua. Mostre que se $X = [0, 1]$, existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Tal ponto é dito ser um **ponto fixo** de f. O que ocorre se X é igual a $[0, 1)$ ou a $(0, 1)$?

Exercício 9. Mostre que se X é um conjunto ordenado munido da topologia da ordem e um espaço conexo então X é um contínuo linear.

Exercício 10. Mostre que se X é um bem-ordenado, isto é, tal que todo subconjunto $A \subset X$ não vazio tem menor elemento, então $X \times [0, 1)$ na ordem do dicionário é um contínuo linear.

Exercício 11. Mostre que se U é um subespaço *aberto* e conexo de $\mathbb{R}^2$, então U é conexo por caminhos. *[Dica: Mostre que dado $x_0 \in U$, o conjunto dos pontos que podem ser ligados a x_0 por um caminho é simultaneamente aberto e fechado em U.]*

2. Espaços Compactos

Exercício 12. (a) Mostre que em $\mathbb{R}$ munido da topologia do complemento finito, todo subespaço é compacto.

(b) Se $\mathbb{R}$ é munido da topologia formada por todos os conjuntos A tais que $\mathbb{R} - A$ é enumerável ou todo $\mathbb{R}$, o intervalo $[0, 1]$ é um subespaço compacto?

Exercício 13. Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua, onde X é compacto e Y é Hausdorff, então f é uma aplicação fechada (f mapeia fechados de X em fechados de Y).

Exercício 14. Mostre que se Y é compacto, então a projeção $\pi_1 : X \times Y \to X$ é uma aplicação fechada.

Exercício 15. *Teorema*: Seja $f : X \to Y$ com Y espaço compacto de Hausdorff. Então f é contínua se e somente se o **gráfico** de f,

$$G_f = \{x \times f(x) \mid x \in X\},$$

é fechado em $X \times Y$. *[Dica: Se G_f é fechado e V é uma vizinhança de $f(x_0)$, então a intersecção de G_f com $X \times (Y - V)$ é fechada. Aplique, então, o Exercício 14.]*

Exercício 16. Seja $p : X \to Y$ uma aplicação fechada, contínua e sobrejetora tal que $p^{-1}(\{y\})$ é compacto para cada $y \in Y$. (Tal aplicação é dita **aplicação perfeita**.) Mostre que se Y é compacto, então X é compacto *[Dica: Se U é um aberto contendo $p^{-1}(\{y\})$, então existe uma vizinhança W de y tal que $p^{-1}(W)$ está contido em U.]*

Exercício 17. Mostre que se X é um conjunto ordenado onde todo intervalo fechado é compacto, então X tem a propriedade da menor cota superior.

Exercício 18. *Teorema*:Seja X um espaço de Hausdorff compacto não-vazio. Se X não tem pontos isolados, então X é não-enumerável.

Prove tal resulado, através dos seguintes passos:

(a) Mostre que dados um aberto não-vazio U de X e um ponto qualquer $x \in X$, existe umaberto não-vazio V contido em U tal que $x \notin \overline{V}$. *[Dica: Use que x não é ponto isolado para escolher um $y \neq x$ em U. Use que X é Hausdorff.]*

(b) Mostre que dada uma função $f : \mathbb{Z}_+ \to X$, temos que f não é sobrejetora. *[Dica: Monte uma sequência de fechados encaixantes a partir de abertos não-vazios V_n tais que $V_n \subset V_{n-1}$ e $\overline{V}_n$ não contém $f(n) = x_x$. Use a compacidade de X.]*

Exercício 19. Mostre que um espaço métrico conexo com mais de um ponto é não-enumerável.

Exercício 20. Seja X um espaço compacto de Hausdorff. Seja $\{A_n\}$ uma coleção enumerável de fechados de X. Mostre que se cada conjunto A_n tem interior vazio em X, então a união $\bigcup A_n$ tem interior vazio em X. *[Dica: Imite as idéias usadas no Exercício 18.]*

Exercício 21. *Teorema*: Seja X um espaço metrizável. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) X é compacto.
(ii) X é compacto por pontos de acumulação.
(iii) X é sequencialmente compacto.

Prove tal resulado, através dos seguintes passos:

(a) Mostre que (i) implica (ii). *[Feito em sala.]*
(b) Mostre que (ii) implica (iii). *[Dica: Dada uma sequência (x_n), estude $A = \{x_n\}$ para A finito e infinito.]*
(c) Mostre que (iii) implica (i).
  (1) Mostre que se X é sequencialmente compacto, então o Lema do Número de Lebesgue vale para X. *[Dica: Suponha $\mathcal{A}$ uma cobertura por abertos de X. Assuma que não existe $\delta > 0$ tal que cada conjunto de diâmetro menor que δ está contido num elemento de $\mathcal{A}$, e encontre uma contradição.]*
  (2) Mostre que se X é sequencialmente compacto, então, dado $\epsilon > 0$, existe um recobrimento finito de X por ϵ-bolas abertas. *[Dica: Tente provar novamente por contradição.]*
  (3) Mostre, finalmente, que se X é sequencialmente compacto, então X é compacto.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/