TOPOLOGIA 1 - LISTA 5

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. Axiomas da Enumerabilidade

Exercício 1. Mostre que se X tem uma base enumerável $\{B_n\}$, então toda base $\mathcal{C}$ pra X contém uma base enumerável para X. *[Dica: Para cada par de íncices n, m, quando possível, escolha $C_{n,m} \in \mathcal{C}$ tal que $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$.]*

Exercício 2. Sejam X espaço com base enumerável e A um subconjunto não-enumerável de X. Mostre que A tem uma quantidade não-enumerável de pontos de acumulação de A.

Exercício 3. Mostre que todo espaço compacto metrizável X tem base enumerável. *[Dica: Considere $\mathcal{A}_n$ uma cobertura finita de X por $1/n$-bolas.]*

Exercício 4. Seja $f : X \to Y$ função contínua. Mostre que se X é Lindelöf, ou se X tem subconjunto enumerável denso, então $f(X)$ satisafaz a mesma condição.

Exercício 5. Mostre que se X é Lindelöf e Y é compacto, então $X \times Y$ é Lindelöf.

Axiomas de Separação

Exercício 6. Mostre que se X é regular, todo par de pontos de X têm vizinhanças cujos fechos são disjuntos.

Exercício 7. Mostre que se X é normal, todo par de fechados disjuntos de X têm vizinhanças cujos fechos são disjuntos.

Exercício 8. Mostre que todo espaço com topologia da ordem é regular.

Exercício 9. Mostre que um subespaço fechado de um espaço normal é normal.

Exercício 10. (a) Mostre que X é normal se e somente se para todo fechado F de X e todo aberto A com $F \subset A$, existe uma família enumerável de abertos $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $F \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ e $\overline{W_n} \subset A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Prove que todo espaço de Lindelöf regular é normal.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/