

TOPOLOGIA 1 - LISTA 6

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

1. LEMA E TEOREMA DE URYSOHN

Exercício 1. Mostre que um espaço conexo normal com mais de um ponto é necessariamente não enumerável.

Nota 1.1. Dizemos que uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in A$, $f(x) = 1$ para $x \in B$ é *separa* A e B , pois $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ e $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ são abertos disjuntos que separam A e B .

Exercício 2. Observamos que o Lema de Urysohn não pode ser generalizado trocando-se X normal por X regular e $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua que separa A e B fechados disjuntos por $g : X \rightarrow [0, 1]$ contínua que separa A fechado e $x \notin A$.

Qual passo da demonstração do lema de Urysohn não pode ser generalizado? Explique.

Exercício 3. $A \subset X$ é dito ser um G_δ -conjunto em X se A é a intersecção de uma coleção enumerável de abertos de X . Prove o seguinte teorema:

Teorema 1.2. *Seja X normal. Então existe uma função $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ para $x \in A$, e $f(x) > 0$ para $x \notin A$, se e somente se A é um fechado G_δ -conjunto em X .*

Nota 1.3. Uma tal função é dita *nula precisamente em A* .

[Dica: Some as funções...]

Exercício 4. Prove:

Teorema 1.4 (Forma forte do Lema de Urysohn). *Seja X espaço normal. Existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in A$, $f(x) = 1$ para $x \in B$ e $0 < f(x) < 1$ caso contrário, se e somente se A e B são G_δ -conjuntos fechados disjuntos em X .*

Exercício 5. Dê um exemplo de espaço de Hausdorff X com base enumerável não metrizável.

Exercício 6. Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Mostre que X é metrizável se e somente se X tem base enumerável.

ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS E TEOREMA DE ASCOLI

Exercício 7. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, com Y completo. Seja $A \subset X$. Mostre que se $f : A \rightarrow Y$ é uniformemente contínua, então f pode ser univocamente estendida a uma função contínua $g : \bar{A} \rightarrow Y$, e g é uniformemente contínua.

Exercício 8. Se (X, d) é um espaço métrico, dizemos que $f : X \rightarrow X$ é uma *contração* se existe um número $\alpha < 1$ tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

para todos $x, y \in X$.

Mostre que se f é contração de um espaço métrico completo, então existe um único ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Exercício 9. Prove:

Teorema 1.5 (Unicidade do Completamento). *Sejam $h : X \rightarrow Y$ e $h' : X \rightarrow Y'$ mergulhos isométricos do espaço métrico (X, d) nos espaços métricos completos (Y, D) e (Y', D') , respectivamente. Então existe uma isometria de $(\overline{h(X)}, D)$ e $(\overline{h'(X)}, D')$ que é igual a $h'h^{-1}$ no subespaço $h(X)$.*

Exercício 10. Demonstre:

Teorema 1.6 (Teorema de Arzela). *Sejam X compacto e $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^k)$. Se a coleção $\mathcal{F} = \{f_n\}$ é pontualmente limitada e equicontínua, então a sequência (f_n) admite uma subsequência uniformemente convergente.*

Exercício 11. Considere $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ munido da métrica do sup ρ . Mostre que a bola $\overline{B}(0, 1) = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}); \rho(0, f) \leq 1\}$ é fechada, limitada, mas não compacta.

[Dica: Mostre que a família $\mathcal{F} = \{x^n\} \subset \overline{B}(0, 1)$ é não equicontínua.]

Exercício 12 (Extra). Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que existe um mergulho isométrico h de X num espaço métrico completo (Y, D) da seguinte forma:

Seja \tilde{X} o conjunto formado por todas as sequências de Cauchy

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$$

de X . Defina $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ se

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0.$$

Denote por $[\mathbf{x}]$ a classe de equivalência de \mathbf{x} , e seja Y o conjunto formado por essas classes de equivalência. Defina em Y a métrica D dada por

$$D([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n).$$

- (a) Mostre que \sim é uma relação de equivalência e D uma métrica bem definida.
 (b) Defina $h : X \rightarrow Y$ por

$$h(x) = [(x, x, \dots)].$$

Mostre que h é mergulho isométrico.

- (c) Mostre que $h(X)$ é denso em Y provando que, dado $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots) \in \tilde{X}$, a sequência $h(x_n)$ de pontos de Y converge para $[\mathbf{x}] \in Y$.
 (d) Mostre que se A é subconjunto denso de um espaço métrico (Z, ρ) , e toda sequência de Cauchy em A converge em Z , então Z é completo.
 (e) Prove que (Y, D) é completo.

Nota 1.7. (Y, D) é o completamento de (X, d) .