PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 5 das 6 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- **Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número 1 a 5.** Nesse caso, o exercício 6, mesmo que corretamente resolvido, será completamente ignorado durante a correção desta prova.
- Boa Prova!

Exercício 1 (2,0). Seja X um conjunto e seja τ_c a coleção de todos os subconjuntos U de X tais que ou $X - U$ é enumerável, ou $X - U = X$. Mostre que τ_c é uma topologia em X.

Exercício 2 (2,0). Seja X um espaço topológico. Suponha que $\mathcal{C}$ é uma coleção de abertos de X tal que para cada aberto $U \subset X$ e cada $x \in U$, existe um elemento $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Mostre que:

(1) $\mathcal{C}$ é base para uma topologia em X.
(2) A topologia gerada por $\mathcal{C}$ é a a topologia original de X.

Exercício 3 (2,0). Mostre que a topologia da ordem do dicionário em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é a mesma da topologia produto $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}_d$ denota $\mathbb{R}$ munido da topologia discreta. Compare tal topologia com a topologia padrão de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 4 (2,0). Mostre que num espaço topológico X Hausdorff todo conjunto unitário é fechado.

Exercício 5 (2,0). Sejam $A \subset X$ e $B \subset Y$. Mostre que, no espaço $X \times Y$, temos:

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

Exercício 6 (2,0). Considere que X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$.

(1) Mostre que se f é contínua então para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, com $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, tal que x_n converge para $x \in X$ temos que $f(x_n)$ converge para $f(x)$.
(2) Mostre que a recíproca vale se X é metrizável, i.é, se X é metrizável e para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tal que $x_n \to x$ temos $f(x_n) \to f(x)$ então f é contínua.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/