PROVA 1

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 5 das 6 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- **Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número** 1 **a** 5**.** Nesse caso, o exercício 6, mesmo que corretamente resolvido, será completamente ignorado durante a correção desta prova.
- Boa Prova!

Exercício 1 (2,0). Mostre que se U é um subespaço *aberto* e conexo de $\mathbb{R}^2$, então U é conexo por caminhos.

Exercício 2 (2,0). Mostre que se X é Lindelöf e Y é compacto, então $X \times Y$ é Lindelöf. *[Considere verdadeiro o lema da vizinhança tubular.]*

Exercício 3 (2,0). Seja X espaço topológico tal que $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$. Mostre que X é normal se e somente se dados A fechado e U aberto contendo A, existe um aberto V tal que $A \subset V$ e $\overline{V} \subset U$.

Exercício 4 (2,0). Considere $\mathbb{R}_l$ o espaço dos reais com topologia do limite inferior, i.é, com topologia gerada pelos intervalos do tipo $[a, b)$. Mostre que:

(1) $\mathbb{R}_l$ tem base enumerável em cada um de seus pontos;
(2) $\mathbb{R}_l$ não admite base enumerável;
(3) $\mathbb{R}_l$ é não conexo;

Exercício 5 (2,0). Seja $f : A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ dado por

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J},$$

onde $f_\alpha : A \to X_\alpha$ para cada α. Mostre que se $\prod X_\alpha$ tem a topologia produto, então f é contínua se e somente se f_α é contínua para todo α.

Exercício 6 (2,0). Mostre que:

(1) Em $\mathbb{R}$ munido da topologia do complemento finito, todo subespaço é compacto.
(2) Em $\mathbb{R}$ munido da topologia do complemento enumerável, apenas os subespaços finitos são compactos, i.é, mostre que subespaços finitos são compactos e que subespaços infinitos (enumeráveis ou não) não são compactos.

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/