PROVA SUBSTITUTIVA - TOPOLOGIA

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

IMPORTANTE:

- Escolham 4 das 6 questões abaixo, indicando sua escolha no início da prova (abaixo do nome).
- **Na ausência da apresentação da escolha serão corrigidos APENAS os exercícios de número 1 a 4.** Nesse caso, os exercícios 5 e 6, mesmo que corretamente resolvidos, serão completamente ignorados durante a correção desta prova.
- Indiquem no início da prova o critério de contabilização de pontos da substitutiva:
  (a) A nota substituirá necessariamente a prova de menor nota já realizada e o limite de conceito permanece A.
  (b) A nota substituirá a prova de menor nota apenas para melhorar o conceito final. Nesse caso o conceito final fica limitado a B.
- Boa Prova!

Exercício 1 (2,0). Sejam X um espaço topológico. Verifique que:
(a) X e $\emptyset$ são fechados;
(b) A intersecção arbitrária de fechados é fechada;
(c) A união finita de fechados é fechada;

Exercício 2 (2,0). Seja $\mathcal{B}$ uma base para a topologia de X e $\mathcal{C}$ uma base para a topologia de Y.
(a) Mostre que a coleção:

$$\mathcal{D} = \{B \times C | B \in \mathcal{B} \text{ e } C \in \mathcal{C}\}$$

é base para a topologia de $X \times Y$.
(b) É verdade que todo aberto de $X \times Y$ é da forma $U \times V$ com U aberto de X e V aberto de Y? Justifique.

Exercício 3 (2,0). Sejam A, B e A_α subconjunto de X. Prove as seguintes afirmações:
(a) Se $A \subset B$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$;
(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(c) $\overline{\cup A_\alpha} \supset \cup \overline{A}_\alpha$. Dê um exemplo onde a igualdade falha.

Exercício 4 (2,0). Mostre que:
(a) A imagem de um compacto por uma função contínua é um compacto.
(b) Se $f : X \to Y$ é uma bijeção contínua, X é compacto e Y é Hausdorff, então f é um homeomorfismo.

Exercício 5 (2,0). Seja X espaço topológico tal que $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$. Mostre que X é regular se e somente se dados $x \in X$ e U vizinhança de x, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \subset U$.

Exercício 6 (2,0). Mostre que a união de uma coleção de subespaços conexos de X que têm um ponto em comum é conexa.
[Dica: Se $X = C \cup D$ é separação de X e $Y \subset X$ é conexo então ou $Y \subset C$ ou $Y \subset D$]

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/