EXERCÍCIOS RESOLVIDOS E RESULTADOS ÚTEIS

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Exercício 1. Seja $\{A_\alpha\}$ uma coleção de subconjuntos de X; Seja $X = \cup_\alpha A_\alpha$. Seja $f : X \to Y$; suponha que $f|_{A_\alpha}$ é contínua para todo α.

(a) Mostre que se a coleção $\{A_\alpha\}$ é finita e cada conjunto A_α é fechado, então f é contínua.
(b) Encontre um exemplo onde a coleção $\{A_\alpha\}$ é enumerável e cada A_α é fechado, mas f não é contínua.
(c) Uma família indexada $\{A_\alpha\}$ é dita **localmente finita** se cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança que intersecta A_α para apenas finitos valores de α. Mostre que se a família $\{A_\alpha\}$ é localmente finita e cada A_α é fechado, então f é contínua.

Resolução:
Item (c):
Usaremos na demonstração o seguinte Lema:

Lema 0.1. *Sejam Y espaço topológico e $\{V_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ uma família localmente finita de subconjuntos de Y. Então $\bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} \overline{V_\beta} = \overline{\bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} V_\beta}$.*

Seja V um fechado de Y. Observe que $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha\in I}(f|_{A_\alpha})^{-1}(V)$ e que cada $(f|_{A_\alpha})^{-1}(V)$ é fechado em A_α, que, por sua vez, é fechado em X. Assim temos que cada $(f|_{A_\alpha})^{-1}(V)$ é fechado em X.

Observando que $(f|_{A_\alpha})^{-1}(V) \subset A_\alpha$, é fácil ver que a coleção $\{(f|_{A_\alpha})^{-1}(V)\}_{\alpha\in I}$ é localmente finita (pois $\{A_\alpha\}$ é localmente finita).

Tomando $F_\alpha = (f|_{A_\alpha})^{-1}(V)$ o Lema acima mostra que:

$$\overline{f^{-1}(V)} = \overline{\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in I} \overline{F}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha = f^{-1}(V).$$

Daí, como imagem inversa por f de fechado é fechada, f é contínua.

Demonstração do Lema: $\bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} \overline{V_\beta} \subset \overline{\bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} V_\beta}$ vale sempre (Lista 2, Exercício 10(c)). Mostremos agora a outra inclusão.

Seja $x \in \overline{\bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} V_\beta}$. Como a família é localmente finita, existe N vizinhança de x que intersecta apenas finitos elementos da coleção, digamos $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_n}$.

Suponha $x \notin \overline{V}_{\beta_1} \cup \dots \cup \overline{V}_{\beta_n}$. Daí temos que $N \cap [Y - (\overline{V}_{\beta_1} \cup \dots \cup \overline{V}_{\beta_n})]$ é uma vizinhança de x que não intersecta $\bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} V_\beta$.

Absurdo pois $x \in \overline{\bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} V_\beta}$. □

Nota 0.2. **Lista 3, 1(b):** Nesse exercício é necessário usar a equivalência de normas de $\mathbb{R}^n$, i.é, se $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ e $||\cdot||$ é uma norma qualquer de $\mathbb{R}^n$, então existem $A, B \in \mathbb{R}$ tal que:

$$A||x|| \le ||x||_1 \le B||x||$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Uma demonstração dessa equivalência pode ser encontrada em:
`http://www.math.uci.edu/~toikhber/TEACH/W11/210B/HMW/HW7/sol.pdf`

Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC
E-mail address: sinue@ufabc.edu.br
URL: http://sinue.ufabc.edu.br/