

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS E RESULTADOS ÚTEIS

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

**Exercício 1** (5 da Lista 4). Seja  $Y \subset X$ . Sejam  $X$  e  $Y$  conexos. Mostre que, se  $A$  e  $B$  formam uma separação de  $X - Y$ , então  $Y \cup A$  e  $Y \cup B$  são conexos.

### Resolução:

Usaremos na demonstração o seguinte Lema:

**Lema 0.1.** Se  $Y$  é subespaço de  $X$ ,  $Y = A \cup B$  é uma separação de  $Y$  se e somente se:

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad e \quad A \cap \overline{B} = \emptyset$$

Provaremos que  $Y \cup A$  é conexo (A prova de que  $Y \cup B$  é conexo é totalmente análoga). Suponha  $Y \cup A$  não conexo, isto é, que existe  $Y \cup A = C \cup D$  separação. Daí:

$$X = (X - Y) \cup Y = (B \cup A) \cup Y = B \cup (A \cup Y) = B \cup (C \cup D) = (B \cup C) \cup D,$$

onde todas as uniões acima são disjuntas.

Provaremos que  $X = (B \cup C) \cup D$  é uma separação de  $X$ , o que será absurdo uma vez que sabemos  $X$  conexo. Para isso provaremos que  $\overline{(B \cup C)} \cap D = \emptyset$  e  $(B \cup C) \cap \overline{D} = \emptyset$ .

Como  $Y$  é conexo e  $Y \cup A = C \cup D$ , sabemos que  $Y \subset C$  ou  $Y \subset D$ . Suporemos, sem perda de generalidade, que  $Y \subset C$ .

Pelo Lema acima temos  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap \overline{B} = \emptyset$ ,  $\overline{C} \cap D = \emptyset$  e  $C \cap \overline{D} = \emptyset$ .

Mostraremos agora  $\overline{(B \cup C)} \subset B \cup C$ , donde seguirá que  $\overline{(B \cup C)} \cap D = \emptyset$  (pois  $(B \cup C) \cup D$  é união disjunta).

Primeiro temos:

$$\overline{(B \cup C)} \subset \overline{B} \cup \overline{C}.$$

Como  $A \cap \overline{B} = \emptyset$  e  $\overline{C} \cap D = \emptyset$  segue:

$$\overline{B} \cup \overline{C} \subset (X - A) \cup (X - D).$$

Uma vez que  $X = B \cup A \cup Y$  e  $X = (B \cup C) \cup D$  vemos que:

$$(X - A) \cup (X - D) = (Y \cup B) \cup (B \cup C).$$

Finalmente, como  $Y \subset C$ , obtemos:

$$(Y \cup B) \cup (B \cup C) \subset B \cup C.$$

Conclusão:  $\overline{(B \cup C)} \subset B \cup C$ .

Para mostrar agora que  $(B \cup C) \cap \overline{D} = \emptyset$  provemos que  $\overline{D} \subset D$ .

Como  $Y \cup A = C \cup D$  e  $Y \subset C$  temos  $D \subset A$ . Daí temos  $\overline{D} \subset \overline{A}$ . Visto que  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ , temos:

$$\overline{D} \subset \overline{A} \subset (X - B).$$

Por outro lado, como  $C \cap \overline{D} = \emptyset$  temos:

$$\overline{D} \subset (X - C).$$

Donde temos:

$$\overline{D} \subset (X - C) \cup (X - B).$$

Finalmente, como  $X = B \cup C \cup D$  segue  $\overline{D} \subset D$ . Assim,  $(B \cup C) \cap \overline{D} = \emptyset$ .

Logo, pelo Lema,  $X = (B \cup C) \cup D$  é uma separação de  $X$ .